

## БІР АЙНЫМАЛЫЛЫ КӨПМҮШЕЛЕРДІҢ ТҮБІРЛЕРІН ТАБУ ӘДІСТЕРІ ТУРАЛЫ

Шомшекова Р.А., Қ.Мұқашев атындағы негізгі орта мектебі, Ақсу ауданы, Құрақсу ауылы

Ғылыми жетекші: Кожашева Г.О., п.ғ.к., доцент

І.Жансүгіров атындағы Жетісу университеті, Талдықорған қ.

E-mail: romi\_1992@mail.ru

Мақалада бір айнымалылы көпмүшелер ұғымы, көпмүшелерге қолданатын амалдар, оларды есептеу, көпмүше түбірі мен оны табу және көпмүшенің түбірін табу әдістеріне қатысты мәселелер қарастырылады. Көпмүшелердің түбірлерін табу әдістері, оларды қолдану ережелері мысалдармен толықтырылған.

**Тірек сөздер:** бір айнымалылы көпмүшелер, көпмүше түбірі, Горнер схемасы, келтірілмейтін көпмүше, келтірілмейтін көпмүше.

В статье рассматриваются вопросы, касающиеся понятия многочленов с одной переменной, операции над многочленами, их вычисления, определения корня многочлена, его нахождения и методов нахождения корня многочлена. Методы нахождения корней многочленов, правила их использования дополнены примерами.

**Ключевые слова:** многочлены одной переменной, корень многочлена, схема Горнера, приводимый многочлен, неприводимый многочлен.

The article deals with issues related to the concept of polynomials with one variable, operations on polynomials, their calculations, determination of the root of a polynomial, its finding and methods of finding the root of a polynomial. Methods for finding the roots of polynomials, the rules for their use are supplemented with examples.

**Keywords:** polynomials of one variable, root of a polynomial, Gorner scheme, reducible polynomial, irreducible polynomial

Математикалық есепті шеше отырып, адам көптеген жаңа нәрселерді біледі: оны шешуге математикалық теорияны қолдана отырып, есепте сипатталған жаңа жағдаймен танысады, есепті шешу үшін қажет жаңа шешу әдісін немесе математиканың жаңа теориялық бөлімдерін біледі. Есептер топтамасын шешу әдісін меңгергеннен кейін адамда осындай есептерді шеше алу білігі қалыптасады, ал жеткілікті машықтанудың арқасында дағдысы да, ал бұл әрине оның математикалық білімін арттырады.

Көпмүшелердің түбірлерін табу есебін қарастырмас бұрын, біз алдымен көпмүшелерді есептеуді қарастырайық. Қазіргі кезге дейін көпмүшелерді есептеудің жалпы қабылданған әдісі Ньютонға оралады және Горнердің схемасы деп аталады. Бұл схеманы ағылшын ғалымы Уильям Джордж Горнер атымен атаған. Бұл әмбебап (яғни кез-келген көпмүшеге қолданылатын) схема өте қарапайым және талғампаз.

Горнердің схемасы соншалықты керемет, оны жақсарту мүмкіндігі туралы сұрақ екі жарым ғасыр бойы туындаған жоқ және алғаш рет тек 1954 жылы қойылды! Бұл сұрақтың тұжырымдалуы (оған жауап әрине теріс деп есептелді) маңызды және күтпеген салдарға әкелді.

Ал егер әрбір көпмүшенің Горнердің схемасынан әлдеқайда үнемді өз схемасы болса, онда қалай болады? Мұндай схемаларды жеке көпмүшенің ерекшеліктеріне сүйене отырып іздеуге болады (оның коэффициенттерін оңтайлы үйлестіре отырып) немесе Горнер схемасына қарағанда әлдеқайда үнемді әмбебап әдісін жасау арқылы, бірақ кейбір көпмүшелер үшін ең жақсы емес схемаларды құру. Бірінші тәсілдің кемшілігі - әр көпмүшенің өз техникасын ойлап табуы керек, және біз оны әрқашан жасай алатынымызға кепілдік жоқ.

Горнер схемасы ұғымын «Көпмүшені көпмүшеге бөлу» тақырыбынан кейін енгізген дұрыс. Оның көмегімен жоғары дәрежелі көпмүшелердің түбірін оларды топтастыру арқылы емес, уақытты үнемдейтін, тиімді тәсілмен табуға мүмкіншілік береді.

Горнердің схемасын тікелей қолдануын мысалмен көрсеткен ыңғайлы деп санадық.

**Мысал 1.** Горнер схемасын пайдаланып  $f(x) = 5x^4 + 5x^3 + x^2 - 11$  көпмүшесін  $x - 1$  екімүшесіне бөлгендегі мәнін табу керек.

Шешуі: Екі жолдан тұратын кесте құрамыз: бірінші жолда  $f(x) = 5x^4 + 5x^3 + x^2 - 11$  көпмүшесінің коэффициенттерін  $x$  айнымалысының дәрежесінің кему реті бойынша жазамыз. Көпмүшеде  $x$  –ң бірінші дәрежесі жоқ, яғни оның алдындағы коэффициент 0 тең, сондықтан сәйкес клеткаға 0 жазамыз.  $x - 1$  бөлетін болғандықтан сол жақтағы төменгі клеткаға, яғни 2 жолда 1-і жазамыз (2 сурет).

$5 \cdot x^4 + 5 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 11$

|   |   |   |   |   |     |
|---|---|---|---|---|-----|
|   | 5 | 5 | 1 | 0 | -11 |
| 1 |   |   |   |   |     |

2 сурет. Горнер схемасын толтыру реті (1 мысал үшін)

Екінші жолдағы бос клеткаларды толтырайық. Екінші жолдың екінші клеткасына 5 санын жазамыз, бірінші жолдың сәйкес клеткасын көшіре салып(3 сурет):

|   |   |   |   |   |     |
|---|---|---|---|---|-----|
|   | 5 | 5 | 1 | 0 | -11 |
| 1 | 5 |   |   |   |     |

3 сурет. Горнер схемасын толтыру

Келесі клетканы мына ереже бойынша есептейміз (4 сурет):  $1 \cdot 5 + 5 = 10$ :

|   |   |    |   |   |     |
|---|---|----|---|---|-----|
|   | 5 | 5  | 1 | 0 | -11 |
| 1 | 5 | 10 |   |   |     |

4 сурет. Горнер схемасын толтыру

Тура осылай төртінші клетканы да толтырамыз (5 сурет):  $1 \cdot 10 + 1 = 11$ :

|   |   |    |    |   |     |
|---|---|----|----|---|-----|
|   | 5 | 5  | 1  | 0 | -11 |
| 1 | 5 | 10 | 11 |   |     |

5 сурет. Горнер схемасын толтыру

Бесінші клетка үшін аламыз (6 сурет):  $1 \cdot 11 + 0 = 11$ :

|   |   |    |    |    |     |
|---|---|----|----|----|-----|
|   | 5 | 5  | 1  | 0  | -11 |
| 1 | 5 | 10 | 11 | 11 |     |

6 сурет. Горнер схемасын толтыру

Және де ең соңғы клетка үшін (7сурет):  $1 \cdot 11 + (-11) = 0$ :

|   |   |    |    |    |     |
|---|---|----|----|----|-----|
|   | 5 | 5  | 1  | 0  | -11 |
| 1 | 5 | 10 | 11 | 11 | 0   |

7 сурет. Горнер схемасын толтыру

Сонымен, есеп шығарылды, жауабын жазу қалды(8 сурет):

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 5 & 5 & 1 & 0 & -11 \\ 1 & 5 & 10 & 11 & 11 & 0 \end{array}$$

$$5x^4 + 5x^3 + x^2 - 11 = (x-1)(5x^3 + 10x^2 + 11x + 11) + 0$$

8 сурет. 1 мысалдың жауабы

Көріп отырғанымыздай, екінші жолдағы сандар(бірмен нолдің арасындағы)  $f(x) = 5x^4 + 5x^3 + x^2 - 11$  көпмүшесін  $x-1$  екімүшесіне бөлгендегі шыққан көпмүшенің коэффициенттері. Алғашқы берілген  $f(x) = 5x^4 + 5x^3 + x^2 - 11$  көпмүшесінің дәрежесі төртке тең болғандықтан,  $5x^3 + 10x^2 + 11x + 11$  көпмүшесінің дәрежесі бірге кем, яғни үшке тең болады. Екінші жбөлгендегі қалдықты білдіреді. Біздің жағдайда ол нолге тең, яғни көпмүшелер біүтіндей бөлінеді. Бұл алған нәтижені былай да айтуға болады:  $f(x) = 5x^4 + 5x^3 + x^2 - 11$  көпмүшесінің  $x=1$  мәні нолге тең.

Бұл нәтижені былай да тұжырымдауға болады:  $f(x) = 5x^4 + 5x^3 + x^2 - 11$  көпмүшесінің  $x=1$  мәні нолге тең болғандықтан, бір саны  $f(x) = 5x^4 + 5x^3 + x^2 - 11$  көпмүшесінің түбірі болады.

Егер көпмүше көбейткіштерге жіктелетін, яғни оның түбірлері бар болса, онда оны *келтірімді* көпмүше деп атайды, кері жағдайда *келтірілмейтін* көпмүше дейді.

Рационал коэффициентті  $f(x)$  көпмүшесін бүтін коэффициентті  $f_1(x) = mf(x) \in Z[x]$  көпмүшесімен ауыстыруға болады, мұнда  $m - f(x)$  көпмүшесінің коэффициенттерінің ең кіші ортақ бөлімі.

Егер дәрежесі 2 –ден артық  $f(x) \in Q[x]$  көпмүшенің  $\alpha \in Q$  түбірі болса, онда ол  $Q$ -де келтірімді:

$$f(x) = (x - \alpha) f_1(x), \quad f_1(x) \in Q[x]$$

Кері ұйғарым дұрыс емес: мысалы  $g(x) = x^4 - 4$ , келтірімді,  $g(x) = (x^2 - 2)(x^2 + 2)$ , бірақ рационал түбірлері жоқ..

Бірақ екінші, үшінші дәрежелі көпмүшелер үшін олардың  $Q$  – дегі келтірімділігінен  $\alpha \in Q$  түбірінің бар болуы шығады.

Енді Эйзенштейн белгісін келтірейік:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, a_0 \neq 0$$

бүтін коэффициентті көпмүшесі  $Q$  өрісінде келтірімсіз егер, келесі шарттарды қанағаттандыратын әйтеур бір әдіспен  $P$  жәй саны табылатын болса:

- 1) көпмүшенің  $a_0$  жоғары коэффициенті  $P$ -ға бөлінбейді;
- 2) көпмүшенің қалған коэффициенттері  $P$ -ға бөлінеді;
- 3) көпмүшенің  $a_n$  бос мүшесі  $P$  - ға бөлінеді, бірақ  $P^2$  -қа бөлінбейді[39-40].

**Мысал 2.** Эйзенштейн белгісінің көмегімен

$$a) f(x) = 3x^5 - 12x^3 + 6x^2 - 72x - 6;$$

көпмүшелері  $Q$  рационал сандар өрісінде келтірімсіз екенін көрсету керек.

Шешуі а)  $P=2$  жәй саны үшін Эйзенштейн белгісінің барлық шарттары орындалады:

1.  $a_0 = 3$  коэффициенті  $P=2$ -ге бөлінбейді;

2. қалған коэффициенттері 12, 6, -72 барлығы  $\rho = 2$  бөлінеді.

3.  $a_n = -6$  бос мүшесі  $\rho = 2$  -ға бөлінеді, бірақ  $\rho^2 = 4$  -ке бөлінбейді, сондықтан  $f(x) \in Q[x]$  өрісінде келтірілмейді.

Бізге  $f(x)$  көпмүшесінің түбірлерін табу үшін, оны көбейткіштерге жіктеген қолайлы, яғни  $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ , сонда есеп шешуі екі қарапайым көпмүшенің түбірін табуға келтіріледі. Бірақ кейбір жағдайда, көпмүшенің барлық түбірлерін табу қиынға соғады. Бұл жерде бізге екі тұжырымнан тұратын және XXVIII ғасырдың француздық математик Ж.Безудің атымен аталған теорема көмекке келеді.

Теорема 1 (Безу).

$f(x)$  көпмүшесін және  $c$  санын қарастырамыз.

1.  $f(x)$  көпмүшесі  $x - c$  екімүшесіне бөлінеді сонда тек сонда ғана  $c$  саны оның түбірі болса ғана;

2.  $f(x)$  көпмүшесін  $x - c$  екімүшесіне бөлгендегі қалдық  $f(c)$  тең болады.

Безу теоремасы көпмүшенің бір түбірі табылса, дәрежесі 1 кем көпмүшенің түбірлерін табуға мүмкіншілік береді: егер  $f(c) = 0$  болса, онда

$$f(x) = (x - c)q(x)$$

болады және  $q(x)$  көпмүшесінің түбірін іздейміз.

Кейде бұл тәсілмен, оны дәрежені төмендету деп атайды, көпмүшенің барлық түбірлерін табуға болады. Мысалы, кубтық көпмүшенің бір түбірін тапсақ, қалған түбірлерін квадрат теңдеуді шешу арқылы табуға болады.

Нақты коэффициентті  $f(x)$  көпмүшесінің нақты түбірлерінің саны туралы мәселені қарастырайық, мұнда бізді нақты түбірлердің жалпы санымен қатар, оң және теріс түбірлерінің саны, және де берілген  $a$  мен  $b$  шекаралары арасында орналасқан түбірлерінің саны да қызықтырады. Түбірлердің нақты санын табудың бірнеше әдісі бар, олардың барлығы өте күрделі; олардың арасындағы ең ыңғайлысы Штурм әдісі.

*Штурм теоремасы:* Егер  $a$  және  $b$ ,  $a < b$  нақты сандары, еселі түбірлері жоқ  $f(x)$  көпмүшесінің түбірлері болмаса, онда  $W(a) \geq W(b)$  және  $W(a) - W(b)$  айырымы  $a$  мен  $b$  арасындағы  $f(x)$  көпмүшесінің нақты түбірлерінің санына тең.

Сонымен,  $f(x)$  көпмүшенің  $a$  және  $b$  арасындағы нақты түбірлерінің санын анықтау үшін ( $f(x)$  шарт бойынша еселі түбірі жоқ екенін есімізде сақтаймыз),  $a$  -дан  $b$  -ға ауысқан кезде осы көпмүшенің Штурм жүйесіндегі таңбалардың өзгеру саны қаншалықты азаятынын анықтаса болды.

Біз алгебра курсына, оның ішінде мектеп алгебрасына кездесетін кездесетін көпмүшелердің түбірлерін табуды қарастырдық. Мектеп алгебраның көптеген есептерінде көпмүшелерді түрлендіру, оларға амалдар қолдану, олардың түбірлерін табу керек және т.с.с деген тапсырмалар кездеседі. Бұл есептер оқушылардың конструктивті ойлау қабілетін дамытудың бірден бір құралы деп айта аламыз.

Белгілі ережелерге сүйену әртүрлі есептерді шешу барысында оқушыларды көптеген қателіктерден сақтайды. Ұлттық Бірыңғай Тестілеудегі тапсырмаларда теңдеулерді шешіндер деген тапсырмалар бар. Оқушылар теңдеуді шешіп жатқанша, жауаптарын теңдеуге қойып тексергенді ыңғайлы деп санайды. Бұл жұмысты оңтайландыру үшін, берілген жауаптардың ішінен теңдеудің бос мүшесінің бөлгіштері болатын сандарды ғана тексерсе және де тексеру үшін Горнер схемасын пайдаланса, уақыт едәуір үнемделетіні анық.

Сондай-ақ, теориялық тапсырмалар жоқ, математикадан ұсынылған 25 тест сұрағының ішінен барлық 25 тапсырманы шешу керек екенін ескере отырып, уақытты үнемдеуге ерекше назар аудару керек. Горнердің схемасы сияқты қосымша әдістер емтихандардың сәтті өтуіне ықпал етеді деген сенімдеміз.

Кейбір жоғары дәрежелі көпмүшелердің түбірлерін табу шешу стандартты емес тәсілді қажет етеді. Мұндай теңдеулердің шешімдерін іздеу оқушылардың шығармашылық ойлауын және жеке тұлғасын дамытуға ықпал етеді. Көпмүшелердің түбірлерін табу әдістері, оларды қолдану ережелері сияқты мәселелерді келешекте мектепте элективтік курс ретінде жүргізу арқылы оқушылар білімін жетілдіруге және пәнге қызығушыларын арттыруда тиімді пайдалану ойымызда.

**ӘДЕБИЕТТЕР:**

1. Дорофеев Г.В. Многочлены с одной переменной / Г.В. Дорофеев, С.В.Пчелинцев //Книга для учащихся. – М.: Просвещение, 2001. – 142 с.
2. Прасолов, В.В. Многочлены / В.В. Прасолов – М.: МЦНМО, 2003. – 336 с.
3. Г. П. Кутищев, Решение алгебраических уравнений произвольной степени. Теория, методы, алгоритмы. Санкт-Петербург, ЛКИ, 2010 г.- 232 с.
4. Кожашева Г.О., Омаров Ж.А. Жоғары алгебраның есептері мен жаттығулары Талдықорған, 2021- 170б.